

Stima & Identificazione

Compito del 25 Giugno 2013, ore 8:30, Aula 120, Edificio di Santa Marta

Problema 1 - Si consideri il segnale casuale y_t generato dal seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} s_t = \frac{1}{4}s_{t-2} + w_{t-1} \\ w_t \sim wn(0, 1) \\ y_t = s_t + v_t \\ v_t \sim wn\left(0, \frac{80}{19}\right) \end{cases}$$

con w_t e v_t incorrelati.

- a) Si dica, giustificando la risposta se y_t è stazionario.
- b) Determinare spettro $\Phi_y(z)$ e densità spettrale $\varphi_y(\omega)$ di y_t .
- c) Determinare modello ARMA di y_t .
- d) Determinare funzione di auto-covarianza $R_y(k)$ di y_t .
- e) Determinare predittori ottimi $\hat{G}_T(z)$ di y_t e relativi guadagni di predizione η_T a $T = 1, 2, 3$ passi.
- f) Determinare modello di Gauss-Markov

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Dw_t \\ y_t = Cx_t + v_t \end{cases}$$

del segnale y_t .

- g) Determinare modello alle innovazioni

$$\begin{cases} \hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t + Ke_t \\ y_t = C\hat{x}_t + e_t \\ e_t \sim wn(0, \sigma_e^2) \end{cases}$$

e predittore stazionario di Kalman (ad 1 passo)

$$\begin{cases} \hat{x}_{t+1} = (A - KC)\hat{x}_t + Ky_t \\ \hat{y}_{t|t-1} = C\hat{x}_t \end{cases}$$

del segnale y_t .

- h) Determinare il filtro causale ottimo a minimo errore quadratico medio del segnale s_t basato sull'osservazione di y_t .

Problema 2 - Sapendo che la densità spettrale di un processo AR(1) (autoregressivo di ordine 1) assume i valori $\varphi(0) = 4$ e $\varphi(\pi) = 1$ determinare

- a) i parametri $\sigma^2 = \text{var}(e_t)$ ed $a \in (-1, 1)$ di tale processo;
- b) la funzione di auto-covarianza del processo.

Problema 3 - Si consideri il problema di approssimare una funzione $f(x)$ osservata sperimentalmente in un numero elevato N di punti x_1, x_2, \dots, x_N con una combinazione lineare di $n \ll N$ funzioni di base note $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ cioè

$$f(x) \cong \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x)$$

Formulare tale problema di approssimazione come un problema di stima ed illustrare un possibile algoritmo ricorsivo per aggiornare le stime dei coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ man mano che si rendono disponibili osservazioni indipendenti della funzione in nuovi punti di misura. Si assuma di non avere alcuna informazione a-priori su tali coefficienti e che tutti gli errori di misura sono caratterizzati dalla stessa varianza.

Problema 4 - Dimostrare che il guadagno di correzione del filtro di Kalman può essere equivalentemente scritto nelle seguenti due forme:

$$L_t = P_{t|t-1} C_t^T S_t^{-1} = P_{t|t} C_t^T R_t^{-1}$$

dove $S_t \triangleq R_t + C_t P_{t|t-1} C_t^T$.